# 第３講　図形と方程式，式と証明

[1]　100 g ずつ袋詰めされている食品 A と B がある。1 袋あたりのエネルギーは食品 A が 200 kcal，食品 B が 300 kcal であり，1 袋あたりの脂質の含有量は食品 A が 4 g，食品 B が 2 g である。

(1)　太郎さんは，食品 A と B を食べるにあたり，エネルギーは 1500 kcal 以下に，脂質は 16 g 以下に抑えたいと考えている。食べる量 (g) の合計が最も多くなるのは，食品 A と B をどのような量の組合せで食べるときかを調べよう。ただし，一方のみを食べる場合も含めて考えるものとする。

(i)　食品 A を $x$ 袋分，食品 B を $y$ 袋分だけ食べるとする。このとき，$x$，$y$ は次の条件①，②を満たす必要がある。

摂取するエネルギー量についての条件　[ア]　……①

摂取する脂質の量についての条件　[イ]　……②

[ア]，[イ] に当てはまる式を，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

**[ア] の解答群**

| | |
|---|---|
| ⓪　$200x+300y \leqq 1500$ | ①　$200x+300y \geqq 1500$ |
| ②　$300x+200y \leqq 1500$ | ③　$300x+200y \geqq 1500$ |

**[イ] の解答群**

| | |
|---|---|
| ⓪　$2x+4y \leqq 16$ | ①　$2x+4y \geqq 16$ |
| ②　$4x+2y \leqq 16$ | ③　$4x+2y \geqq 16$ |

（[1]は次ページに続く。）

(ii)　$x$，$y$ の値と条件①，②の関係について正しいものを，次の⓪～③のうちから二つ選べ。ただし，解答の順序は問わない。［ウ］，［エ］

⓪　$(x,\ y)=(0,\ 5)$ は条件①を満たさないが，条件②は満たす。

①　$(x,\ y)=(5,\ 0)$ は条件①を満たすが，条件②は満たさない。

②　$(x,\ y)=(4,\ 1)$ は条件①も条件②も満たさない。

③　$(x,\ y)=(3,\ 2)$ は条件①と条件②をともに満たす。

(iii)　条件①，②をともに満たす $(x,\ y)$ について，食品 A と B を食べる量の合計の最大値を二つの場合で考えてみよう。

食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられるような食品のとき，すなわち $x$，$y$ のとり得る値が実数の場合，食べる量の合計の最大値は［オカキ］g である。このときの $(x,\ y)$ の組は，

$$(x,\ y)=\left(\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}},\ \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)$$ である。

次に，食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられないような食品のとき，すなわち $x$，$y$ のとり得る値が整数の場合，食べる量の合計の最大値は［シスセ］g である。このときの $(x,\ y)$ の組は［ソ］通りある。

(2)　花子さんは，食品 A と B を合計 600 g 以上食べて，エネルギーは 1500 kcal 以下にしたい。脂質を最も少なくできるのは，食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられない食品の場合，A を［タ］袋，B を［チ］袋食べるときで，そのときの脂質は［ツテ］g である。

2 (1) 座標平面上に点Aをとる。点Pが放物線 $y=x^2$ 上を動くとき，線分APの中点Mの軌跡を考える。

(i) 点Aの座標が $(0,\ -2)$ のとき，点Mの軌跡の方程式として正しいものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。 ア

⓪ $y=x^2-1$　① $y=2x^2-1$　② $y=\frac{1}{2}x^2-1$

③ $y=|x|-1$　④ $y=2|x|-1$　⑤ $y=\frac{1}{2}|x|-1$

(ii) $p$ を実数とする。点Aの座標が $(p,\ -2)$ のとき，点Mの軌跡は(i)の軌跡を $x$ 軸方向に イ だけ平行移動したものである。 イ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\frac{1}{2}p$　① $p$　② $2p$

③ $-\frac{1}{2}p$　④ $-p$　⑤ $-2p$

(iii) $p,\ q$ を実数とする。点Aの座標が $(p,\ q)$ のとき，点Mの軌跡と放物線 $y=x^2$ との共有点について正しいものを，次の⓪～⑤のうちから**すべて選べ**。

ウ

⓪ $q=0$ のとき，共有点はつねに2個である。

① $q=0$ のとき，共有点が1個になるのは $p=0$ のときだけである。

② $q=0$ のとき，共有点は0個，1個，2個のいずれの場合もある。

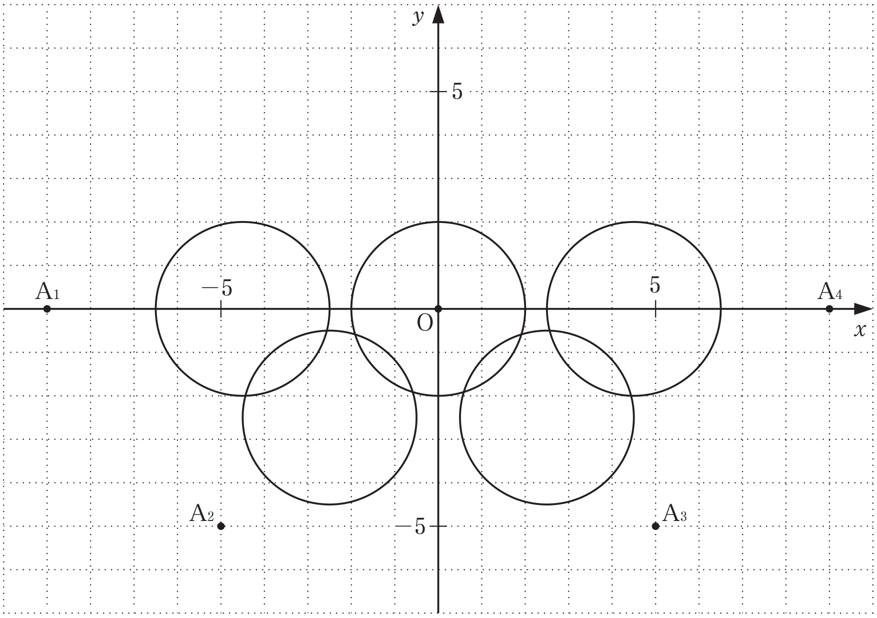
③ $q<p^2$ のとき，共有点はつねに0個である。

④ $q=p^2$ のとき，共有点はつねに1個である。

⑤ $q>p^2$ のとき，共有点はつねに0個である。

(2は次ページに続く。)

(2) ある円 $C$ 上を動く点 Q がある。下の図は定点 O(0, 0), $A_1(-9,\ 0)$, $A_2(-5,\ -5)$, $A_3(5,\ -5)$, $A_4(9,\ 0)$ に対して，線分 OQ, $A_1Q$, $A_2Q$, $A_3Q$, $A_4Q$ のそれぞれの中点の軌跡である。このとき，円 $C$ の方程式として最も適当なものを，下の⓪～⑦のうちから一つ選べ。 エ




| | |
|---|---|
| ⓪ $x^2+y^2=1$ | ① $x^2+y^2=2$ |
| ② $x^2+y^2=4$ | ③ $x^2+y^2=16$ |
| ④ $x^2+(y+1)^2=1$ | ⑤ $x^2+(y+1)^2=2$ |
| ⑥ $x^2+(y+1)^2=4$ | ⑦ $x^2+(y+1)^2=16$ |

**3**〔1〕 $a$ を定数とする。座標平面上に，原点を中心とする半径５の円 $C$ と，直線 $\ell : x+y=a$ がある。

$C$ と $\ell$ が異なる２点で交わるための条件は，

$$-\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}<a<\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}} \quad \cdots\cdots①$$

である。①の条件を満たすとき，$C$ と $\ell$ の交点の一つを P(s，$t$) とする。このとき，

$$st=\frac{a^2-\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

< NOTE >

〔2〕 先生と太郎さんと花子さんは，次の問題とその解答について話している。三人の会話を読んで，下の問いに答えよ。

【問題】

$x$，$y$ を正の実数とするとき，$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)$ の最小値を求めよ。

**【解答A】**

$x>0$，$\dfrac{1}{y}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$x+\frac{1}{y}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{y}}=2\sqrt{\frac{x}{y}}\quad\cdots\cdots①$$

$y>0$，$\dfrac{4}{x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$y+\frac{4}{x}\geqq 2\sqrt{y\cdot\frac{4}{x}}=4\sqrt{\frac{y}{x}}\quad\cdots\cdots②$$

である。①，②の両辺は正であるから，

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{4}{x}\right)\geqq 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot 4\sqrt{\frac{y}{x}}=8$$

よって，求める最小値は 8 である。

**【解答B】**

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{4}{x}\right)=xy+\frac{4}{xy}+5$$

であり，$xy>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係により

$$xy+\frac{4}{xy}\geqq 2\sqrt{xy\cdot\frac{4}{xy}}=4$$

である。すなわち，

$$xy+\frac{4}{xy}+5\geqq 4+5=9$$

よって，求める最小値は 9 である。

（③〔2〕は次ページに続く。）

先生　「同じ問題なのに，解答Ａと解答Ｂで答えが違っていますね。」

太郎　「計算が間違っているのかな。」

花子　「いや，どちらも計算は間違えていないみたい。」

太郎　「答えが違うということは，どちらかは正しくないということだよね。」

先生　「なぜ解答Ａと解答Ｂで違う答えが出てしまったのか，考えてみましょう。」

花子　「実際に $x$ と $y$ に値を代入して調べてみよう。」

太郎　「例えば $x=1$，$y=1$ を代入してみると，$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)$ の値は $2\times5$ だから 10 だ。」

花子　「$x=2$，$y=2$ のときの値は $\dfrac{5}{2}\times4=10$ になった。」

太郎　「$x=2$，$y=1$ のときの値は $3\times3=9$ になる。」

（太郎と花子，いろいろな値を代入して計算する）

花子　「先生，ひょっとして［ア］ということですか。」

先生　「そのとおりです。よく気づきましたね。」

花子　「正しい最小値は［イ］ですね。」

(1)　［ア］に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$xy+\dfrac{4}{xy}=4$ を満たす $x$，$y$ の値がない

①　$x+\dfrac{1}{y}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ かつ $xy+\dfrac{4}{xy}=4$ を満たす $x$，$y$ の値がある

②　$x+\dfrac{1}{y}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ かつ $y+\dfrac{4}{x}=4\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ を満たす $x$，$y$ の値がない

③　$x+\dfrac{1}{y}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ かつ $y+\dfrac{4}{x}=4\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ を満たす $x$，$y$ の値がある

(2)　［イ］に当てはまる数を答えよ。

# 第３講　図形と方程式，式と証明

**1** (1)(i)　摂取するエネルギー量についての条件は

$200x+300y\leqq 1500$　(⓪)……①

摂取する脂質の量についての条件は

$4x+2y\leqq 16$　(②)……②

| 1袋あたり | A | B |
|---|---|---|
| 量 | 100 g | 100 g |
| エネルギー | 200 kcal | 300 kcal |
| 脂　質 | 4 g | 2 g |

(ii)　①より $2x+3y\leqq 15$　　②より $2x+y\leqq 8$

$f(x,\ y)=2x+3y,\quad g(x,\ y)=2x+y$　とおく。

⓪：$f(0,\ 5)=15$より，条件①を満たす。よって，正しくない。

①：$f(5,\ 0)=10,\quad g(5,\ 0)=10$ より，条件①は満たすが，条件②は満たさない。よって，正しい。

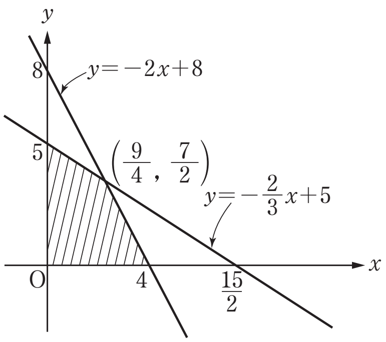
②：$f(4,\ 1)=11$ より，条件①を満たす。よって，正しくない。

③：$f(3,\ 2)=12,\ g(3,\ 2)=8$ より，条件①，条件②をともに満たす。よって，正しい。

以上より，正しいものは　①　と　③

(iii)　①より $y\leqq -\frac{2}{3}x+5$　　②より $y\leqq -2x+8$

よって，①，②，および $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ を満たす領域は右図斜線部分(境界含む)




食べる量の合計を $100x+100y=k$ とおき，

直線 $y=-x+\frac{k}{100}$ (傾き $-1$) が右図領域内の点を通るときに，$y$ 切片 $\frac{k}{100}$ が最大となるときを考える。

食品 A，B が１袋を小分けにして食べられるような食品のとき，$x$，$y$ は実数。

よって，直線 $y=-x+\frac{k}{100}$ が点 $\left(\frac{9}{4},\ \frac{7}{2}\right)$ を通るとき，$y$ 切片 $\frac{k}{100}$ は最大となる。

このとき，$k=100\cdot\frac{9}{4}+100\cdot\frac{7}{2}=575$

したがって，食べる量の合計の最大値は　575 g　　($(x,\ y)=\left(\frac{9}{4},\ \frac{7}{2}\right)$のとき)

食品 A，B が１袋を小分けにして食べられないような食品のとき，$x$，$y$ は整数。

このとき，$k=100(x+y)$ は 100 の倍数である。

したがって，食べる量の合計の最大値は，575 g 以下で最大の 100 の倍数である 500 g

$k=500$ のとき　$100(x+y)=500$　つまり　$x+y=5$

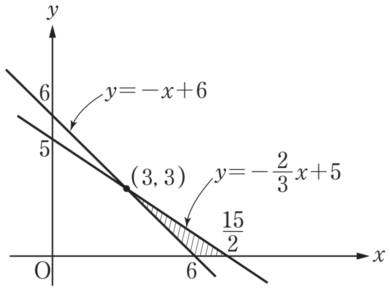
これを満たす領域内の整数 $(x,\ y)$ の組は　$(x,\ y)=(0,\ 5),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$ の 4 通りある。

(2)　花子さんが食品 A と B を合計 600 g 以上食べて，エネルギーを 1500 kcal 以下にするとき，

$100x+100y\geqq 600$　かつ　$200x+300y\leqq 1500$

すなわち　$x+y\geqq 6$ ……③　かつ　$2x+3y\leqq 15$ ……④

③，④，および $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ を満たす領域は右図斜線部分(境界含む)




このとき，脂質の量の合計を $4x+2y=l$ とおき，直線 $y=-2x+\frac{l}{2}$（傾き $-2$）が右図領域内の点を通るときに，$y$ 切片 $\frac{l}{2}$ が最小になるときを考える。

食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられない食品のとき，$x$，$y$ は整数。

よって，直線 $y=-2x+\frac{l}{2}$ が点 $(3,\ 3)$ を通るとき，$y$ 切片 $\frac{l}{2}$ は最小となる。

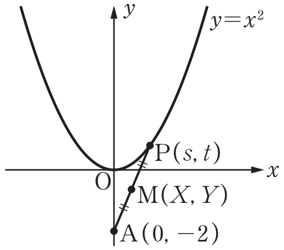
このとき，$l=4\cdot 3+2\cdot 3=18$

したがって，A を 3 袋，B を 3 袋食べるときに脂質が最も少なくでき，そのときの脂質は 18 g である。

**2**　(1)　$\mathrm{P}(s,\ t)$，$\mathrm{M}(X,\ Y)$ とおく。

点 P は放物線 $y=x^2$ 上の点より，$t=s^2$ ……①

(i)　$\mathrm{A}(0,\ -2)$ のとき

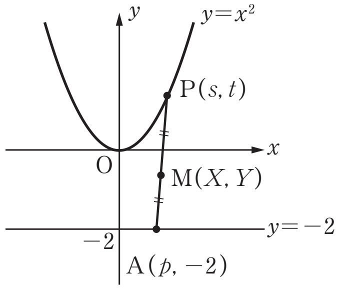



$$\begin{cases} X=\dfrac{s}{2} \\ Y=\dfrac{t-2}{2} \end{cases} \quad より \quad \begin{cases} s=2X \\ t=2Y+2 \end{cases}$$

これを①に代入して　$2Y+2=(2X)^2$

よって $Y=2X^2-1$　したがって，点 M の軌跡の方程式は $y=2x^2-1$　(①)

(ii)　A$(p,\ -2)$ のとき




$$\begin{cases} X=\dfrac{s+p}{2} \\ Y=\dfrac{t-2}{2} \end{cases} \quad より \quad \begin{cases} s=2X-p \\ t=2Y+2 \end{cases}$$

これを①に代入して

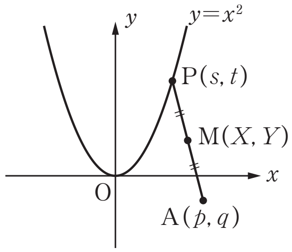
$$2Y+2=(2X-p)^2$$

$$2Y+2=\left\{2\left(X-\frac{p}{2}\right)\right\}^2$$

$$2Y+2=2^2\left(X-\frac{p}{2}\right)^2 \quad よって\ Y=2\left(X-\frac{p}{2}\right)^2-1$$

したがって，点 M の軌跡は(i)の軌跡を $x$ 軸方向に $\dfrac{1}{2}p$（⓪）だけ平行移動したものである。

(iii)　A$(p,\ q)$ のとき




$$\begin{cases} X=\dfrac{s+p}{2} \\ Y=\dfrac{t+q}{2} \end{cases} \quad より \quad \begin{cases} s=2X-p \\ t=2Y-q \end{cases}$$

これを①に代入して

$$2Y-q=(2X-p)^2 \quad よって\ Y=2X^2-2pX+\frac{p^2}{2}+\frac{q}{2}$$

したがって，点 M の軌跡の方程式は $y=2x^2-2px+\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{q}{2}$

これと放物線 $y=x^2$ の共有点の $x$ 座標は，$x^2=2x^2-2px+\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{q}{2}$ より，

$x$ の 2 次方程式 $x^2-2px+\dfrac{p^2}{2}+\dfrac{q}{2}=0$ の実数解であり，この実数解の個数が共有点の個数である。

この方程式の判別式を $D$ とすると，

$$\frac{D}{4}=p^2-1\cdot\left(\frac{p^2}{2}+\frac{q}{2}\right)=\frac{p^2}{2}-\frac{q}{2}=\frac{p^2-q}{2}$$

$q=0$ のとき，$\dfrac{D}{4}=\dfrac{p^2}{2}\geqq 0$（等号成立は $p=0$ のとき）

したがって，⓪，②は正しくなく，①は正しい。

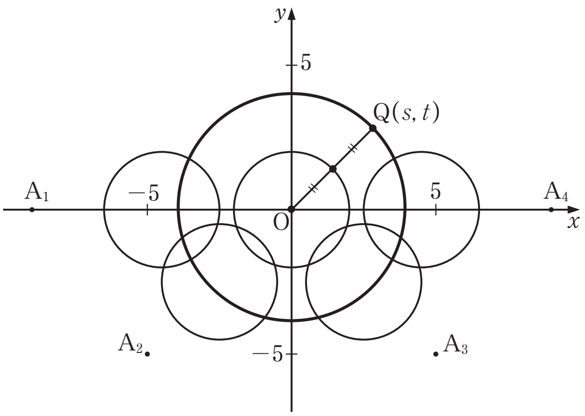
③：$q<p^2$ のとき，$D>0$　　よって，正しくない。

④：$q=p^2$ のとき，$D=0$　　よって，正しい。

⑤：$q>p^2$ のとき，$D<0$　　よって，正しい。

以上より，正しいものは ①，④，⑤

(2) 線分 OQ の中点の軌跡は，図より O(0，0) 中心，半径 2 の円であり，円 $C$ は O(0，0) 中心，半径 4 の円，すなわち円 $C$ の方程式は $x^2+y^2=16$ であることが予想される。




この円周上の点を Q($s$，$t$) とおくと

$$s^2+t^2=16 \quad \cdots\cdots②$$

OQ の中点の座標を $M_0(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{s}{2} \\ Y=\dfrac{t}{2} \end{cases} \text{ より } \begin{cases} s=2X \\ t=2Y \end{cases}$$

これを②に代入して $(2X)^2+(2Y)^2=16$　$4X^2+4Y^2=16$　よって $X^2+Y^2=4$

したがって，線分 OQ の中点の軌跡の方程式は $x^2+y^2=4$ であり，図の円の 1 つに一致する。

$A_1Q$ の中点の座標を $M_{A_1}(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{s-9}{2} \\ Y=\dfrac{t}{2} \end{cases} \text{ より } \begin{cases} s=2X+9 \\ t=2Y \end{cases}$$

これを②に代入して

$$(2X+9)^2+(2Y)^2=16$$

$$\left\{2\left(X+\frac{9}{2}\right)\right\}^2+4Y^2=16 \qquad 4\left(X+\frac{9}{2}\right)^2+4Y^2=16$$

よって $\left(X+\dfrac{9}{2}\right)^2+Y^2=4$

したがって，線分 $A_1Q$ の中点の軌跡の方程式は $\left(x+\dfrac{9}{2}\right)^2+y^2=4$ であり，図の円の 1 つに一致する。

$A_2Q$ の中点の座標を $M_{A_2}(X,\ Y)$とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{s-5}{2} \\ Y=\dfrac{t-5}{2} \end{cases} \text{ より } \begin{cases} s=2X+5 \\ t=2Y+5 \end{cases}$$

これを②に代入して

$$(2X+5)^2+(2Y+5)^2=16$$

$$4\left(X+\frac{5}{2}\right)^2+4\left(Y+\frac{5}{2}\right)^2=16$$

よって　$\left(X+\frac{5}{2}\right)^2+\left(Y+\frac{5}{2}\right)^2=4$

したがって，線分 $A_2Q$ の中点の軌跡の方程式は $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=4$ であり，図の円の１つに一致する。

$A_3Q$ の中点の座標を $M_{A_3}(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=\frac{s+5}{2} \\ Y=\frac{t-5}{2} \end{cases} \text{より} \begin{cases} s=2X-5 \\ t=2Y+5 \end{cases}$$

これを②に代入して整理すると，

$$\left(X-\frac{5}{2}\right)^2+\left(Y+\frac{5}{2}\right)^2=4$$

したがって，線分 $A_3Q$ の中点の軌跡の方程式は $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=4$ であり，図の円の１つに一致する。

$A_4Q$ の中点の座標を $M_{A_4}(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=\frac{s+9}{2} \\ Y=\frac{t}{2} \end{cases} \text{より} \begin{cases} s=2X-9 \\ t=2Y \end{cases}$$

これを②に代入して整理すると，

$$\left(X-\frac{9}{2}\right)^2+Y^2=4$$

したがって，線分 $A_4Q$ の中点の軌跡の方程式は $\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+y^2=4$ であり，図の円の１つに一致する。

以上より，円 $C$ の方程式は $x^2+y^2=16$　(③)

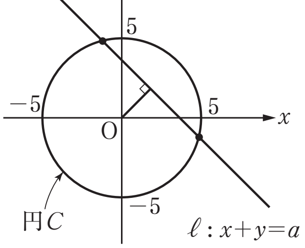
**3**〔１〕 $C:x^2+y^2=25$ と $\ell:x+y=a$ が異なる２点で交わるための条件は，

($C$ の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $\ell:x+y-a=0$ の距離)

　＜ ($C$ の半径５)

よって，$\frac{|0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}<5$　　$|a|<5\sqrt{2}$

したがって，$-5\sqrt{2}<a<5\sqrt{2}$ ……①



（別解）　$C: x^2+y^2=25$ と $\ell: y=-x+a$ の共有点の $x$ 座標は

2 次方程式 $x^2+(-x+a)^2=25$ の実数解である。

整理して $2x^2-2ax+a^2-25=0$

これが異なる 2 つの実数解をもつのは，判別式を $D$ とすると $D>0$ のとき

$$\frac{D}{4}=a^2-2\cdot(a^2-25)=-a^2+50>0$$

$a^2<50$　　したがって，$-5\sqrt{2}<a<5\sqrt{2}$

①の条件を満たすとき，$C$ と $\ell$ の交点の一つを $\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると，$\mathrm{P}(s,\ t)$ は円 $C$，直線 $\ell$ 上の点より

$$\begin{cases} s^2+t^2=25 & \cdots\cdots ② \\ s+t=a & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②より　$(s+t)^2-2st=25$　　これに③を代入して　$a^2-2st=25$

したがって　$st=\dfrac{a^2-25}{2}$

〔２〕

(1)　【解答A】において

$x+\dfrac{1}{y}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{y}}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ ……① の等号が成立するのは $x=\dfrac{1}{y}$ つまり $xy=1$ のとき

$y+\dfrac{4}{x}\geqq 2\sqrt{y\cdot\dfrac{4}{x}}=4\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ ……② の等号が成立するのは $y=\dfrac{4}{x}$ つまり $xy=4$ のとき

よって，①：$x+\dfrac{1}{y}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{y}}=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ かつ ②：$y+\dfrac{4}{x}\geqq 2\sqrt{y\cdot\dfrac{4}{x}}=4\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ を満たす $x$，$y$ の値がない（❷）ため，①と②の等号が同時に成立することはない。

したがって，$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)\geqq 2\sqrt{\dfrac{x}{y}}\cdot 4\sqrt{\dfrac{y}{x}}=8$ の等号が成立せず，

$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)$ の値が 8 となることはない。ゆえに，最小値が 8 である，というのは誤りである。

(2)　【解答B】において，$xy+\dfrac{4}{xy}\geqq 2\sqrt{xy\cdot\dfrac{4}{xy}}=4$，すなわち

$xy+\dfrac{4}{xy}+5\geqq 2\sqrt{xy\cdot\dfrac{4}{xy}}+5=9$ の等号が成立するのは $xy=\dfrac{4}{xy}$ すなわち $(xy)^2=4$ のときであり，$xy>0$ より，$xy=2$ のときである（例：$x=2$，$y=1$）。

したがって，$xy+\dfrac{4}{xy}+5$，すなわち $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{4}{x}\right)$ の最小値は 9 である。